EXAMEN PROBATOIRE

D'ADMISSION DANS

LES ECOLES D'OFFICIERS

CSEA 2013

ÉPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 1

- L'usage de la calculatrice est autorisé
- Une feuille de papier millimétrée peut-être utilisée pour traiter les exercices I et III
- Ce sujet comporte quatre exercices, ils peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice I

On considère le nombre complexe $a = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1. **a.** Calculer a^5

b. Pour tout nombre complexe z, vérifier : $z^5 - 1 = (z-1)(1 + z^2 + z^3 + z^4)$

En déduire que $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0$.

2. **a.** Montrer que $a^3 = (\overline{a})^2$ et $a^4 = \overline{a}$. En déduire l'égalité : $(a + \overline{a})^2 + (a + \overline{a}) - 1 = 0$

En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation 4x² + 2x -1 = 0.

Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal unité 2 cm, on note I, A, B, C, D les points d'affixes 1, a, a^2, a^3, a^4 .

a. Montrer que IA= AB= BC= CD= DI.

b. Les points I et A étant donnés en annexe, indiquer une construction des points B, C, D : expliquer cette construction et faire apparaître sur la figure les trait de construction.

Exercice II

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes et 2 vertes. Dans les questions **1.** et **2.** on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne. Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit les événements suivants:
A " les trois boules sont rouges"
B " les trois boules sont de la même couleur"
C " les trois boules sont chacune d'une couleur différente"

a. Calculer les probabilités $p(A)$; $p(B)$ et $p(C)$.

b. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues.
Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer E(X).

2. Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc n + 5 boules, c'est - à- dire n rouges, 3 jaunes et 2 vertes.
On tire au hasard et simultanément 2 boules de cette urne. Soit les événements suivants :
D " tirer deux boules rouges"
E " tirer deux boules de la même couleur".

a. Montrer que la probabilité de l'événement D est : $p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

b. Calculer la probabilité de l'événement E, $p(E)$ en fonction de n. Pour quelles valeurs de n a- t- on $p(E) \geq \frac{1}{2}$?

Exercice III

Soit la suite (u_n) définie pour tout n ≥ 2 par : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x} dx$.

1. Construire dans un repère orthonormal, unité 2 cm, la courbe représentant la fonction inverse sur l'intervalle] 0; + ∞[.

2. a. Sur les intervalles [1; 2]; [2; 3]et [3; 4] , construire les rectangles R_1, R_2, R_3, de hauteurs $\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4}$ et les rectangles R'_1, R'_2, R'_3, de hauteurs 1 ; $\frac{1}{2};\frac{1}{3}$. En déduire un encadrement de l'intégrale : $\int_1^4 \frac{1}{x} dx$

b. n désigne un entier naturel n≥ 2, en considérant de même les intervalles [1; 2]; [2; 3]…. [n; n-1]; [n-1; n], donner un encadrement de l'intégrale $\int_1^n \frac{1}{x} dx$. On précisera ce que représente graphiquement chacun des termes de cet encadrement.

3- En déduire que pour tout n entier, n ≥ 2 , $0 \leq u_n \leq 1$.

4- a. Démontrer que pour tout entier n, n≥ 2, $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$.

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note C sa limite. (On ne cherchera pas à calculer C)

5- Soit la suite (v_n) définie pour tout n entier, n≥ 2, par : $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

a. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b. En déduire que pour tout entier n, n≥ 2, $0 \leq u_n - C \leq \frac{1}{n}$

Exercice IV

La fonction f est définie sur l'intervalle [0 ; +∞ [par $f(x) = (20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x}$.

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 0,5cm).

1. Etudier la limite de la fonction f en +∞.

2. Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations. Construire (C)

3. Etablir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle

] 0 ; +∞ [. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de α.

4. a est un nombre réel strictement positif. Exprimer en fonction de a l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses, les droites d'équation x = 0 ; x = a. Calculer la limite de cette aire quand a tend vers +∞

ANNEXE