EXAMEN PROBATOIRE
D'ADMISSION DES ETRANGERS DANS LES ECOLES DE FORMATION D'OFFICIERS

Session 2012

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE DE L'EPREUVE : 4 Heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Chaque candidat doit traiter quatre exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice I (3 points)

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=e^{-x^2}$.

1- Démontrer que cette fonction est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

2- On pose $J_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$, n étant un entier naturel.

a. Montrer que cette suite est à termes positifs

b. Montrer que pour tout entier *n,* $f(n+1) < J_n < f(n)$.

3- En déduire le comportement asymptotique de cette suite J_n.

Exercice II (3 points)

Une classe compte 30 élèves dont 20 filles. A chaque cours de mathématiques, le professeur de cette classe interroge au hasard un élève. D'un cours à l'autre, le professeur ne se rappelle pas de l'élève interrogé au cours précédent ce qui fait qu'à chaque cours, le choix de l'élève par le professeur est indépendant des choix précédents.

1.Quelle est la probabilité, à un cours donné, que l'élève interrogé soit une fille ?

2. Soit n un entier positif non nul.

On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de filles interrogées durant n cours de mathématiques consécutifs.

a. Quelle est la loi de probabilité de X ?

b. Quelle est la probabilité que le nombre de filles interrogées soit égal à 4 durant 10 cours consécutifs ?

c. Quel doit être le nombre minimum de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 ?

Exercice III (3points).

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = x-1$.

1- A l'aide d'une intégration par parties , calculer $\int_1^x e^t(t-1)dt$

2- a- Soit z une fonction dérivable sur l'ensemble R des nombres réels.

On pose $f(x)=z(x)e^{-x}$. Montrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si , pour tout x réel , $z'(x)=e^x(x-1)$

b- Déterminer toutes les fonctions z vérifiant pour tout x réel $z'(x)=e^x(x-1)$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

Exercice IV(7points)

Partie A

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2x-1+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.On désigne par (C) la courbe représentant f dans un repère orthonormal unité 2cm.

1- Déterminer les limites de cette fonction aux bornes de l'ensemble de définition.

2- Etudier le sens de variation de f.

3- Démontrer que (C) admet une asymptote oblique, nommée (D) .Etudier la position relative de (C) et (D).

4- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dont on donnera un encadrement à 10^{-1} près.
5- Construire (C) et (D) en tenant compte de tout ce qui a été justifié précédemment .

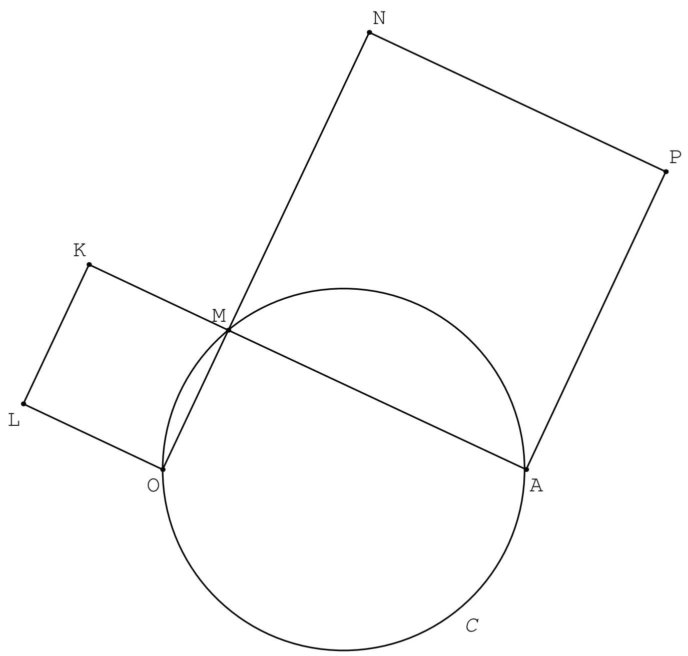
Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n strictement positif par : $u_n = f(n) - (2n-1)$.

1- Comparer u_n à u_{n+1}. Etudier le comportement asymptotique de la suite u_n .
2- On pose $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$, exprimer cette somme en fonction de *n.* Etudier le comportement asymptotique de cette suite S_n.
3- On pose $T_n = u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{2n}$. Exprimer T_n en fonction de *n.* Etudier le comportement asymptotique de cette suite T_n.

EXERCICE V (4 points)

Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle *C* de diamètre $[OA]$, un point M variable appartenant au cercle *C* et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct MAPN et MKLO. La figure est représentée ci-dessous.



Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de montrer que le point N *appartient à un cercle à déterminer.*

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On note *k*, *l*, *m*, *n* et *p* les affixes respectives des points K, L, M, N et P.

1. Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle *C*, on a : $\left|m - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

2. Etablir les relations suivantes : $l = \mathrm{i}m$ et $p = -\mathrm{i}m + 1 + \mathrm{i}$.
On admettra que l'on a également $n = (1 - \mathrm{i})m + \mathrm{i}$ et $k = (1 + \mathrm{i})m$.

3. **a.** Démontrer que le milieu Ω du segment $[\mathrm{PL}]$ est un point indépendant de la position du point M sur le cercle *C*.
b. Démontrer que le point Ω appartient au cercle *C* et préciser sa position sur ce cercle.

4. **a.** Calculer la distance KN,
b. Quelle est la nature du triangle ΩNK. Démontrer que le point N appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.