ANNÉE 2013

CONCOURS SUR ÉPREUVES

D'ADMISSION AU COURS DE L'ÉCOLE DE L'AIR

OPTION « SCIENCES »

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 8

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Chaque candidat doit traiter les quatre exercices proposés. Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.

L'attention des candidats est portée sur le fait que l'on tiendra compte du soin et de la rigueur apportée dans le travail.

Si, en cours d'épreuve, le candidat rencontre ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signale et continue sa composition.

T.S.V.P.
Ce sujet comporte 2 pages

Exercice 1

1. Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

   Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(x\tan(\theta))\, d\theta$.

2. (a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

   (b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Quel est le sens de variations de f ?

   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et donner une expression intégrale de $f'(x)$ pour $x > 0$.

4. Montrer que : $\forall x > 0$, $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{4}$. On pourra utiliser 1. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

5. Montrer que f n'est pas dérivable en 0. On pourra utiliser le changement de variable défini par $u = x\tan(\theta)$.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$.

1. Quel est le rayon de convergence des séries entières $\sum x^n$ et $\sum 2^{n+1}x^n$?

2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2^{n+1} - 1$.

   (b) Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$. Montrer que $R \in [\frac{1}{2}, 1]$.

3. (a) Pour $x \in]-R, R[$, on pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Montrer que :

   $$\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, \ S(x) = \frac{1 + x + x^2}{(1+x)^2(1-2x)}.$$

   (b) Montrer qu'il existe un unique triplet (a, b, c) de réels que l'on déterminera tel que :

   $$\forall x \in]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}[, \ S(x) = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{(1+x)^2} + \frac{c}{1-2x}.$$

4. Calculer u_n en fonction de n. En déduire la valeur de R.

5. Déduire de ce qui précède que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(3n+2)(-1)^n + 7.2^n$ est un entier naturel multiple de 9.