

## CORRIGÉS SUJET 1

### Exercice 1

1. Soit  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $\arctan x$  et  $\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{x})$  sont dans  $]0, \frac{\pi}{2}[$  et ont la même tangente. Donc :  
 $\forall x \in ]0, +\infty[, \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ .
  
2. (a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  $\varphi : \theta \mapsto \arctan(x \tan(\theta))$  est définie et continue sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , et prolongeable par continuité en  $\frac{\pi}{2}$ .  $\varphi$  est donc intégrable sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .  $f$  est donc définie sur  $\mathbb{R}$ . Enfin,  $\tan$  et  $\arctan$  sont impaires, donc  $f$  est impaire.  
 (b) Pour  $(x, \theta) \in \mathbb{R} \times ]0, \frac{\pi}{2}[$ , posons  $h(x, \theta) = \arctan(x \tan(\theta))$ .  $h$  est continue sur  $\mathbb{R} \times ]0, \frac{\pi}{2}[$  par théorèmes généraux. De plus :  $\forall (x, \theta) \in \mathbb{R} \times ]0, \frac{\pi}{2}[, |h(x, \theta)| \leq \frac{\pi}{2} = \psi(\theta)$ , où  $\psi$  est continue et intégrable sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ . Le théorème de continuité sous le signe  $\int$  permet de conclure :  
 $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
  
3. (a) Soit  $(x, x') \in \mathbb{R}^2, x < x' : f(x') - f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\arctan(x' \tan(\theta)) - \arctan(x \tan(\theta))) d\theta > 0$ .  
 Donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .  
 (b)  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R} \times ]0, \frac{\pi}{2}[$  par théorèmes généraux. De plus :  
 $\forall a > 0, \forall (x, \theta) \in [a, +\infty[ \times ]0, \frac{\pi}{2}[, \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, \theta) \right| = \frac{\tan(\theta)}{1+x^2 \tan^2(\theta)} \leq \frac{\tan(\theta)}{1+a^2 \tan^2(\theta)} = \chi(\theta)$ , où  $\chi$  est continue et intégrable sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , puisque prolongeable par continuité en  $\frac{\pi}{2}$ . Par application du théorème de Leibniz,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ , et :  $\forall x > 0, f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(\theta)}{1+x^2 \tan^2(\theta)} d\theta$ .
  
4. Soit  $x > 0 : f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan\left(\frac{1}{x} \tan(\theta)\right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan\left(\frac{1}{x \tan(\alpha)}\right) d\alpha$ , grâce au changement de variable défini par  $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ . Donc, grâce au 1. :  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x \tan(\theta))\right) d\theta = \frac{\pi^2}{4} - f(x)$ .  
 Mais  $f$  est continue en 0, donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{4}$ .
  
5. Soit  $x > 0. f(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(u)}{u^2+x^2} du$ , grâce au changement de variable défini par  $u = x \tan(\theta)$ .  
 Donc :  $\frac{f(x)}{x} \geq \int_0^1 \frac{\arctan(u)}{u^2+x^2} du \geq \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{u}{u^2+x^2} du$ , en utilisant l'inégalité de convexité :  
 $\forall u \in [0, 1], \arctan(u) \geq \frac{\pi}{4}u$ . Donc  $\frac{f(x)}{x} \geq \frac{\pi}{2} (\ln(1+x^2) - 2\ln(x))$ .  
 Or  $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1+x^2) - 2\ln(x)) = +\infty$ . Donc  $f$  n'est pas dérivable à droite en 0, donc n'est pas dérivable en 0.

## Exercice 2

- Les deux séries entières proposées sont des séries géométriques : le rayon de convergence de  $\sum x^n$  est  $r = 1$  et celui de  $\sum 2^{n+1}x^n$  est  $r' = \frac{1}{2}$ .
- Raisonnons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ , d'hypothèse :  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, 1 \leq u_k \leq 2^{k+1} - 1$ .  
La propriété est clairement vérifiée au rang  $n = 1$ . Supposons-la vérifiée à un rang  $n \in \mathbb{N}^*$  :  
 $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} + (-1)^{n-1} \geq 3 + (-1)^{n-1} \geq 1$ , et  $u_{n+1} \leq 2^{n+1} - 1 + 2(2^n - 1) + 1$ , donc :  
 $u_{n+1} \leq 2^{n+2} - 2 \leq 2^{n+2} - 1$ . La propriété à établir est donc vérifiée au rang  $(n + 1)$ .  
Finalement :  $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2^{n+1} - 1$ .
  - $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |x|^n \leq |u_n x^n|$ , donc  $\forall x \in ]-R, R[$ ,  $\sum x^n$  converge absolument. Donc  $r \geq R$ .  
De même :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^{n+1} - 1 \leq 2^{n+1}$ , donc  $R \geq r'$ . Finalement :  $R \in [\frac{1}{2}, 1]$ .
- Soit  $x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ . En multipliant la relation de définition de  $(u_n)_n$  par  $x^{n+2}$  et en sommant de 0 à  $+\infty$ , on obtient :  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+2} = x \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} + 2x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ .  
Donc :  $S(x) - (1+x) = x(S(x) - 1) + 2x^2 S(x) + \frac{x^2}{1+x}$ . D'où  $S(x) = \frac{1+x+x^2}{(1+x)^2(1-2x)}$ .
  - $\forall x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ ,  $\frac{a}{1+x} + \frac{b}{(1+x)^2} + \frac{c}{1-2x} = \frac{a(1+x)(1-2x) + b(1-2x) + c(1+x)^2}{(1-2x)(1+x)^2} = \frac{(a+b+c)x + (-a-2b+2c) + x^2(-2a+c)}{(1-2x)(1+x)^2}$ .  
Donc :  $\forall x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ ,  $S(x) = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{(1+x)^2} + \frac{c}{1-2x}$  si et seulement si  
 $\forall x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ ,  $(a+b+c) + x(-a-2b+2c) + x^2(-2a+c) = 1+x+x^2$ , donc si et seulement si le polynôme  $(1+2a-c)X^2 + (1+a+2b-2c)X + (1-a-b-c)$  est nul (il a une infinité de racines). Le système obtenu donne  $a = -\frac{1}{9}$ ,  $b = \frac{1}{3}$  et  $c = \frac{7}{9}$ .
- De l'égalité du 3. (b), on déduit :  
 $\forall x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ ,  $S(x) = -\frac{1}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(-1)^n x^n + \frac{7}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n$ . Du lemme d'unicité, on déduit :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{9} \left( (-1)^{n+1} + 3(n+1)(-1)^n + 7 \cdot 2^n \right) = \frac{1}{9} \left( (3n+2)(-1)^n + 7 \cdot 2^n \right)$ .  
Or  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{7}{9} 2^n$ . Donc  $R = \frac{1}{2}$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$ . De plus, par récurrence forte sur  $n \in \mathbb{N}^*$ , on montre grâce à la relation de définition de  $(u_n)_n$  que  $u_n \in \mathbb{Z}$ . Donc :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$ . Or :  $\forall n \in \mathbb{N}, (3n+2)(-1)^n + 7 \cdot 2^n = 9u_n$ , donc  $(3n+2)(-1)^n + 7 \cdot 2^n$  est un entier naturel multiple de 9. On pouvait prouver ce résultat directement par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  d'hypothèse :  $(3n+2)(-1)^n + 7 \cdot 2^n$  est un entier relatif multiple de 9. En remarquant que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n+1$ , que l'on justifie grâce au développement de  $2^n = (1+1)^n$  par la formule du binôme, on montre que  $\forall n \in \mathbb{N}, (3n+2)(-1)^n + 7 \cdot 2^n$  est un entier naturel.

