CORRIGÉS SUJET 1

Exercice 1

1. Soit $x \in]0,+\infty[$, $\arctan x$ et $\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{x})$ sont dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ et ont la même tangente. Donc :

   $\forall x \in]0,+\infty[, \ \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\varphi : \theta \mapsto \arctan(x\tan(\theta))$ est définie et continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, et prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$. φ est donc intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. f est donc définie sur $\mathbb{R}$. Enfin, tan et arctan sont impaires, donc f est impaire.

   (b) Pour $(x,\theta) \in \mathbb{R} \times [0, \frac{\pi}{2}[$, posons $h(x,\theta) = \arctan(x\tan(\theta))$. h est continue sur $\mathbb{R} \times [0, \frac{\pi}{2}[$ par théorèmes généraux. De plus : $\forall (x,\theta) \in \mathbb{R} \times [0, \frac{\pi}{2}[, \ |h(x,\theta)| \leq \frac{\pi}{2} = \psi(\theta)$, où ψ est continue et intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Le théorème de continuité sous le signe $\int$ permet de conclure : f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Soit $(x,x') \in \mathbb{R}^2$, $x < x'$: $f(x') - f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\arctan(x'\tan(\theta)) - \arctan(x\tan(\theta))\right) \, d\theta > 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   (b) h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times [0, \frac{\pi}{2}[$ par théorèmes généraux. De plus : $\forall a > 0, \ \forall (x,\theta) \in [a,+\infty[\times [0, \frac{\pi}{2}[, \ |\frac{\partial h}{\partial x}(x,\theta)| = \frac{\tan(\theta)}{1+x^2\tan^2(\theta)} \leq \frac{\tan(\theta)}{1+a^2\tan^2(\theta)} = \chi(\theta)$, où χ est continue et intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, puisque prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$. Par application du théorème de Leibniz, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et : $\forall x > 0, \ f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(\theta)}{1+x^2\tan^2(\theta)} \, d\theta$.

4. Soit $x > 0$: $f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(\frac{1}{x}\tan(\theta)) \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan\left(\frac{1}{x\tan(\alpha)}\right) d\alpha$, grâce au changement de variable défini par $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Donc, grâce au 1. : $f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x\tan(\theta))\right) d\theta = \frac{\pi^2}{4} - f(x)$.

   Mais f est continue en 0, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{4}$.

5. Soit $x > 0$. $f(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(u)}{u^2+x^2} \, du$, grâce au changement de variable défini par $u = x\tan(\theta)$. Donc : $\frac{f(x)}{x} \geq \int_0^1 \frac{\arctan(u)}{u^2+x^2} \, du \geq \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{u}{u^2+x^2} \, du$, en utilisant l'inégalité de convexité : $\forall u \in [0,1], \ \arctan(u) \geq \frac{\pi}{4} u$. Donc $\frac{f(x)}{x} \geq \frac{\pi}{2}\left(\ln(1+x^2) - 2\ln(x)\right)$.

   Or $\lim_{x \to 0}\left(\ln(1+x^2) - 2\ln(x)\right) = +\infty$. Donc f n'est pas dérivable à droite en 0, donc n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2

1. Les deux séries entières proposées sont des séries géométriques : le rayon de convergence de $\sum x^n$ est $r = 1$ et celui de $\sum 2^{n+1}x^n$ est $r' = \frac{1}{2}$.

2. (a) Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, d'hypothèse : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $1 \leq u_k \leq 2^{k+1} - 1$.
La propriété est clairement vérifiée au rang $n = 1$. Supposons-la vérifiée à un rang $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} + (-1)^{n-1} \geq 3 + (-1)^{n-1} \geq 1$, et $u_{n+1} \leq 2^{n+1} - 1 + 2(2^n - 1) + 1$, donc : $u_{n+1} \leq 2^{n+2} - 2 \leq 2^{n+2} - 1$. La propriété à établir est donc vérifiée au rang $(n + 1)$.
Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2^{n+1} - 1$.

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x|^n \leq |u_n x^n|$, donc $\forall x \in]-R, R[$, $\sum x^n$ converge absolument. Donc $r \geq R$.
De même : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2^{n+1} - 1 \leq 2^{n+1}$, donc $R \geq r'$. Finalement : $R \in [\frac{1}{2}, 1]$.

3. (a) Soit $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. En multipliant la relation de définition de $(u_n)_n$ par x^{n+2} et en sommant de 0 à $+\infty$, on obtient : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+2} = x\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} + 2x^2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n + x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$.
Donc : $S(x) - (1 + x) = x(S(x) - 1) + 2x^2 S(x) + \frac{x^2}{1+x}$. D'où $S(x) = \frac{1+x+x^2}{(1+x)^2(1-2x)}$.

   (b) $\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, $\frac{a}{1+x} + \frac{b}{(1+x)^2} + \frac{c}{1-2x} = \frac{a(1+x)(1-2x)+b(1-2x)+c(1+x)^2}{(1-2x)(1+x)^2} = \frac{(a+b+c)+x(-a-2b+2c)+x^2(-2a+c)}{(1-2x)(1+x)^2}$.
Donc : $\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, $S(x) = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{(1+x)^2} + \frac{c}{1-2x}$ si et seulement si
$\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, $(a+b+c) + x(-a-2b+2c) + x^2(-2a+c) = 1 + x + x^2$, donc si et seulement si le polynôme $(1+2a-c)X^2 + (1+a+2b-2c)X + (1-a-b-c)$ est nul (il a une infinité de racines). Le système obtenu donne $a = -\frac{1}{9}$, $b = \frac{1}{3}$ et $c = \frac{7}{9}$.

4. De l'égalité du 3. (b), on déduit :
$\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, $S(x) = -\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(-1)^n x^n + \frac{7}{9}\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n$. Du lemme d'unicité, on déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{9}\Big((-1)^{n+1} + 3(n+1)(-1)^n + 7.2^n\Big) = \frac{1}{9}\Big((3n+2)(-1)^n + 7.2^n\Big)$.
Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{7}{9}\, 2^n$. Donc $R = \frac{1}{2}$.

5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$. De plus, par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$, on montre grâce à la relation de définition de $(u_n)_n$ que $u_n \in \mathbb{Z}$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$. Or : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(3n+2)(-1)^n + 7.2^n = 9u_n$, donc $(3n+2)(-1)^n + 7.2^n$ est un entier naturel multiple de 9. On pouvait prouver ce résultat directement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ d'hypothèse : $(3n+2)(-1)^n + 7.2^n$ est un entier relatif multiple de 9. En remarquant que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n+1$, que l'on justifie grâce au développement de $2^n = (1+1)^n$ par la formule du binôme, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(3n+2)(-1)^n + 7.2^n$ est un entier naturel.