CORRIGE DU SUJET 1

$\boxed{\textsc{Problème 1}}$

1. On écrit le développement limité à l'ordre 3 de sin en 0 :

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$$

donc $$\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{x\left(1 - \dfrac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^2)\right)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^2)\right)$$

Ainsi $$\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{6}x + \mathrm{o}(x)$$

La fonction φ possède un développement limité à l'ordre 0 en 0 donné par $\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(1)$ donc elle est bien prolongeable par continuité en 0 par $\varphi(0) = 0$. Puisqu'en outre, elle possède un développement limité à l'ordre 1 en 0, ce prolongement est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = -\dfrac{1}{6}$. Ensuite, φ est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et

$$\forall x \in \left]0\,;\pi/2\right] \qquad \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

donc $$\varphi'(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{x^2} + \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right)\frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \mathrm{o}(x^2)\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{6} + \mathrm{o}(1)$$

Ainsi, φ' est continue en 0. On a finalement montré :

> La fonction φ est prolongeable par continuité en 0 et le prolongement ainsi défini est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle fermé $[0\,;\pi/2]$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, sa dérivée f' y est continue, et donc bornée par une constante $K \in \mathbb{R}_+$. Ainsi, pour tout $t \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$|f'(t)\cos(nt)| \leqslant K \qquad \text{et} \qquad \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f'(t)\cos(nt)|\,\mathrm{d}t \leqslant K\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\text{La suite } \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 0} \text{ est bornée.}}$$

(b) Une intégration par parties (justifiée par le caractère $\mathscr{C}^1$ des fonctions en jeu) donne, pour tout $n \geqslant 1$,

$$I_n = -\left[\frac{f(t)\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2} f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

Comme f est continue sur le segment $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, elle est bornée sur ce segment par une constante $\widetilde{M}$, et on obtient finalement,

$$|I_n| \leqslant \frac{1}{n}(2\widetilde{M} + M) = \frac{\widehat{M}}{n}$$

(c) Par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. (a) La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}$ est continue sur $]\,0\,;\pi/2\,]$. En 0, $\sin x \underset{0}{\sim} x$ donc $\dfrac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} \underset{0}{\sim} 2n+1$ et $x \longmapsto \dfrac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}$ est prolongable par continuité en 0 par $2n+1$. Finalement, J_n, étant faussement impropre en 0, est bien définie.

(b) Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
J_{n+1} - J_n &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+3)x) - \sin((2n+1)x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)\cos(2x) + \sin(2x)\cos((2n+1)x) - \sin((2n+1)x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin((2n+1)x)(-2\sin^2(x))}{\sin(x)} + \frac{2\sin(x)\cos(x)\cos((2n+1)x)}{\sin(x)}\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\pi/2} (-\sin((2n+1)x)\sin(x) + \cos(x)\cos((2n+1)x))\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \cos(2nx)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\left[\frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_0^{\pi/2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(c) Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
J_n = J_1 &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(3x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2x) + \cos(2x))\,\mathrm{d}x \\
&= [x + \sin(2x)]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

4. Soit $a > 0$.

(a) Pour tout $X > a$, le changement de variable $u = t + \pi/2$ nous donne (les fonctions considérées étant continues sur le segment $[\,a\,;X\,]$) :

$$\int_a^X \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{a+\pi/2}^{X+\pi/2} \frac{|\sin\left(u - \frac{\pi}{2}\right)|}{u - \dfrac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}u = \int_{a+\pi/2}^{X+\pi/2} \frac{|\cos(u)|}{u - \dfrac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}u.$$

Ainsi, les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{a+\pi/2}^{+\infty} \frac{|\cos(t)|}{t - \frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}t$ ont même nature. Or

$$0 < \frac{|\cos(t)|}{t - \dfrac{\pi}{2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{|\cos(t)|}{t}.$$

Il suit que les intégrales concernées ont bien même nature.

(b) Notons que l'intégrale considérée est faussement impropre en 0 puisque la fonction intégrée est prolongeable par continuité en 0 par 1. De plus, puisque sin est à valeurs dans $[\,-1\,;1\,]$, pour tout $t \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{\sin^2 t}{t} \leqslant \dfrac{|\sin t|}{t}$. Il suffit donc de montrer, d'après le théorème de comparaison, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\mathrm{d}t$ est divergente. Or $\dfrac{\sin^2 t}{t} = \dfrac{1}{2t} -$

$\dfrac{\cos(2t)}{2t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t}\mathrm{d}t$ est divergente d'après le critère de Riemann, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\mathrm{d}t$ est convergente comme le montre une intégration par parties. On en déduit par linéarité de l'intégrale que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge et donc que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ aussi.

(c) L'intégrale considérée est convergente comme le montre l'intégration par parties suivante, valable pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

5. (a) La fonction φ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[\,0\,;\pi/2\,]$, l'intégrale considérée est bien définie. D'après la question 2, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f(x)\sin((2n+1)x)\,\mathrm{d}x$ ne dépend pas de f et vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_{2n+1} = 0$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \varphi(x)\sin((2n+1)x)\,\mathrm{d}x = 0$. Ensuite, d'après la question 3,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi(x)\sin((2n+1)x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ car les fonctions considérées sont continues sur $]\,0\,;\pi/2\,]$ et prolongeables par continuité en 0. De plus,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Par conséquent,

$$\int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \varphi(x)\sin((2n+1)x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

et comme les suites composant le membre de droite sont toutes deux convergentes, on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \varphi(x)\sin((2n+1)x)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad + \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

1 Étude de trois exemples

1.1 Premier exemple

6. (a) Soit $M = (m[i,j]) \in \mathcal{S}_2$. On note $a = m[1,1]$ et $b = m[2,2]$. Puisque $m[1,1]+m[1,2] = 1$, on a $m[1,2] = 1-a$. Par définition d'un élément de $\mathcal{S}_2$, on a $m[1,1] = a \geqslant 0$ et $m[1,2] = 1-a \geqslant 0$ ce qui implique $0 \leqslant a \leqslant 1$. De même pour b.

   (b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ 1-d & d \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d) \in [\,0\,;1\,]^4$. Alors

$$AB = \begin{pmatrix} ac+(1-a)(1-d) & a(1-c)+(1-a)d \\ (1-b)c+b(1-d) & (1-b)(1-c)+bd \end{pmatrix}$$

   Tous les coefficients de cette matrice sont positifs car $(a,b,c,d) \in [\,0\,;1\,]^4$.
   On vérifie facilement que la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.

7. (a) On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}$.
   En prenant $a = \frac{5}{6}$ et $b = \frac{1}{6}$, on a bien la relation voulue.

   (b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, qu'il existe $a_n \in \mathbb{R}$ et $b_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = a_n A + b_n I_2$. La récurrence est initialisée pour $n=1$ avec $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ (on a montré également à la question précédente que l'hypothèse de récurrence était vérifiée pour $n=2$ avec $a_2 = \frac{5}{6}$ et $b_2 = \frac{1}{6}$).
   On suppose que l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$ et on montre qu'elle est vraie au rang $n+1$:

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n \\ &= a_n A^2 + b_n A \\ &= a_n\left(\frac{5}{6}A + \frac{1}{6}I_2\right) + b_n A \\ &= \left(\frac{5}{6}a_n + b_n\right)A + \frac{1}{6}a_n I_2 \end{aligned}$$

   On pose $a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + b_n$ et $b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n$ et la propriété est démontrée par récurrence.

   (c) On a ainsi obtenu les relations suivantes, valables pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{5}{6}a_n + b_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{6}a_n \end{aligned}.$$

   On remarque que pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n$. Comme $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$, il vient :

$$\forall n \geqslant 1 \qquad a_n + b_n = 1$$

   On obtient alors

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + b_n = \frac{5}{6}a_n + (1-a_n) = -\frac{1}{6}a_n + 1 \\ b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n = \frac{1}{6}(1-b_n) = -\frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6} \end{cases}.$$

   On a ainsi obtenu une relation entre a_n et a_{n+1}, et entre b_n et b_{n+1}, valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) On cherche un réel l tel que la suite $(u_n) = (a_n - l)$ soit géométrique. En utilisant, la relation démontrée à la question précédente, on obtient $u_{n+1} + l = -\dfrac{1}{6}(u_n + l) + 1$. En prenant, $l = \dfrac{6}{7}$, on a $u_{n+1} = -\dfrac{1}{6}u_n$ qui est bien une suite géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{6}$. Ainsi, la relation

$$\forall n \geqslant 1 \qquad u_n = q^{n-1}u_1$$

implique

$$\forall n \geqslant 1 \qquad a_n = \frac{6}{7} + \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{6}{7}\right) = \frac{6}{7} + \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{7}.$$

Comme $\forall n \geqslant 1,\ b_n = 1 - a_n$, on a

$$\forall n \geqslant 1 \qquad b_n = \frac{1}{7} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{7}$$

(e) Par conséquent, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} A^n &= \left(\frac{6}{7} + \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{7}\right)A + \left(\frac{1}{7} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{7}\right)I_2 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} - \frac{2}{21}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} & \frac{4}{7} + \frac{2}{21}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \\ \frac{4}{7} - \frac{1}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} & \frac{3}{7} + \frac{1}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(f) La suite de matrices (A^n) converge car chaque suite $(a^n[i,j])$, $1 \leqslant i,\ j \leqslant 2$ converge :

$$\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \to +\infty$$

Ainsi la limite est $A^\infty = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$. Il est aisé de vérifier que $A^\infty \in \mathcal{S}_2$.

(g) On s'intéresse désormais à la suite (C_n). D'après la question 7e, les termes généraux de ces suites sont de la forme $\dfrac{1 + n\lambda}{n+1} + \dfrac{\mu}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{6}\right)^k$ avec λ et μ réels. Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{6}\right)^k$ est bornée, $\dfrac{\mu}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{6}\right)^k$ tend vers 0 pour $n \to +\infty$. Ainsi la limite de la suite C_n est A^∞.

1.2 Deuxième exemple

8. (a) Soit $v = (x, y, z) \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. Alors $Mv = v$, ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} x &= x \\ bx + ay &= y \\ by + az &= z \end{cases}$$

Puisque $a - 1 = -b$ et $b \neq 0$, on en déduit $x = y = z$. Ainsi

$$\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \{(x, x, x),\ x \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(v_1)$$

(b) D'après la question précédente, $\dim(\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}))=1$. Le théorème du rang permet alors de dire que

$$\dim(\mathrm{Im}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}))=2$$

Or

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) &= \mathrm{Vect}\,((f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(e_1),(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(e_2),(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(e_3))\\ &= \mathrm{Vect}\,(be_2,(a-1)e_2+be_3,(a-1)e_3)\\ &= \mathrm{Vect}\,(e_2,e_3)\end{aligned}$$

Ainsi $\{e_2,e_3\}$ est une famille de cardinal 2, libre et génératrice de $\mathrm{Im}(f-\mathrm{id}_3)$ qui est de dimension 2. Dès lors, $\{e_2,e_3\}$ est bien une base de $\mathrm{Im}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

(c) Comme $\dim(\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}))+\dim(\mathrm{Im}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}))=1+2=3$, il suffit de montrer que l'intersection de ces deux sous-espaces est restreinte à $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Cela se démontre aisément puisque la réunion des bases de ces sous-espaces exhibées aux deux questions précédentes est une famille libre.

(d) Puisque $v_1\in\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et $e_2,e_3\in\mathrm{Im}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, par définition de p on obtient $p(v_1)=v_1$, $p(e_2)=0$ et $p(e_3)=0$. De plus, $e_1=v_1-e_2-e_3$, d'où $p(e_1)=p(v_1)=v_1$. La matrice P s'écrit alors dans la base canonique (e_1,e_2,e_3) :

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

9. La matrice M de f dans la base canonique est triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, c'est-à-dire 1 et a. L'espace propre associé à la valeur propre 1 est $\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{id}_3)=\mathrm{Vect}(v_1)$ d'après la question 8a.
Soit un vecteur $(x,y,z)\in\mathrm{Ker}\,(f-a\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. Alors

$$\left\{\begin{array}{ll}(1-a)x&=0\\ \quad bx&=0\\ \quad by&=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}x&=0\\ y&=0\end{array}\right.$$

Ainsi l'espace propre associé à a est $\mathrm{Ker}\,(f-a\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})=\mathrm{Vect}(e_3)$. Comme $\dim(\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}))+\dim(\mathrm{Ker}\,(f-a\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}))=2<3$, f n'est pas diagonalisable.

10. (a) Des égalités $f(v_1)=v_1$, $f(e_2)=ae_2+be_3$ et $f(e_3)=ae_3$, on déduit $M'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a&0\\0&b&a\end{pmatrix}$.

(b) On trouve $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ dont l'inverse vaut $C^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$.
Ainsi on a $M=CM'C^{-1}$.

(c) On trouve $(M')^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a^2&0\\0&2ab&a^2\end{pmatrix}$, et $(M')^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a^3&0\\0&3a^2b&a^3\end{pmatrix}$. On postule alors pour $k\in\mathbb{N}^*$, l'expression $(M')^k=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a^k&0\\0&ka^{k-1}b&a^k\end{pmatrix}$ et on la démontre par récurrence. On l'a vérifiée pour $k=1$, supposons la vraie pour un $k\in\mathbb{N}^*$ et démontrons la pour $k+1$.
$(M')^{k+1}=(M')^kM'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a^k&0\\0&ka^{k-1}b&a^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a&0\\0&b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a^{k+1}&0\\0&(k+1)a^kb&a^{k+1}\end{pmatrix}$.
Ainsi l'expression de $(M')^k$ est démontrée pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.
Ensuite, en utilisant la matrice de passage C, on obtient

$$M^k = C(M')^k C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^k & a^k & 0 \\ 1-ka^{k-1}b-a^k & ka^{k-1}b & a^k \end{pmatrix}$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, comme $a \in]\,0\,;1\,[$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} a^k = 0$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} ka^{k-1} = 0$,

d'où $\lim\limits_{k\to+\infty} M^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$.

2 Étude du cas général

11. (a) Soit λ et $\mu \in \mathbb{R}_+$ tels que $\lambda+\mu = 1$ et soit M, N matrices appartenant à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont nous notons respectivement $m[i,j]$ et $n[i,j]$ les termes généraux avec $1 \leqslant i,j \leqslant n$. Le terme général de la matrice $\lambda M+\mu N$ est $\lambda m[i,j]+\mu n[i,j]$, et, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$,

$$\sum_{j=1}^n (\lambda m[i,j] + \mu n[i,j]) = \lambda \sum_{j=1}^n m[i,j] + \mu \sum_{j=1}^n n[i,j] = \lambda \times 1 + \mu \times 1 = 1$$

car M et N sont des matrices stochastiques. Par conséquent, $\lambda M+\mu N$ est une matrice stochastique.

(b) Soit M et $N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Le terme général de la matrice MN est pour $1 \leqslant i,j \leqslant n$, $\sum\limits_{k=1}^n m[i,k]n[k,j]$, et pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m[i,k]n[k,j] &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n m[i,k]n[k,j] \\ &= \sum_{k=1}^n \left(m[i,k] \sum_{j=1}^n n[k,j] \right) \\ &= \sum_{k=1}^n m[i,k] \times 1 = 1 \end{aligned}$$

MN est une matrice stochastique.

(c) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrons par récurrence que $A^k \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
L'initialisation est naturellement vérifiée pour A^1. On suppose désormais la propriété vraie pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Puisque $A^{k+1} = A^k A$ et que A^k et A appartiennent à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (hypothèse de récurrence), on a bien $A^{k+1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ d'après la question précédente.

À présent, montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $C_p \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. La propriété est vraie pour $p = 0$ car la matrice identité est bien une matrice stochastique.
Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que $C_p \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $C_{p+1} = \dfrac{p+1}{p+2} C_p + \dfrac{1}{p+2} A^{p+1}$. On peut appliquer le résultat de la question 11a car $\dfrac{p+1}{p+2} + \dfrac{1}{p+2} = 1$ et $C_p \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (hypothèse de récurrence), $A^{p+1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
On conjecture que la limite de la suite (C_p), lorsqu'elle existe, est encore une matrice stochastique (et cela se prouve, mais n'est pas l'objet du présent problème...)

12. (a) Question de cours.

(b) Soit $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors $f(x) = \left(\sum\limits_{j=1}^n m_{1j}x_j, \ldots, \sum\limits_{j=1}^n m_{nj}x_j \right)$ et d'après l'inégalité triangulaire, on a, pour chaque coordonnée du vecteur $f(x)$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n m_{ij}x_j \right| &\leqslant \sum_{j=1}^n m_{ij}|x_j| \qquad (\text{car } m_{ij} \geqslant 0) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^n m_{ij}\|x\| \qquad (\text{car } |x_j| \leqslant \|x\| \text{ pour tout } j) \\ &= \|x\| \qquad (\text{car } M \text{ est une matrice stochastique}). \end{aligned}$$

En conclusion, on a bien montré que $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(c) Soit λ une valeur propre de f. Il existe $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$. En appliquant le résultat démontré à la question précédente,

$$\|f(x)\| \leqslant \|x\| \Longrightarrow \|\lambda x\| \leqslant \|x\|$$

Comme $\|.\|$ est une norme, on a $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$. Ainsi $|\lambda|\|x\| \leqslant \|x\|$ et puisque x n'est pas le vecteur nul, $|\lambda| \leqslant 1$.

(d) La matrice M associée à f dans la base canonique étant stochastique, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\sum_{j=1}^{n} m[i,j] = 1$. Si on note v_1 le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1, on vérifie aisément que $Mv_1 = v_1$. Cela indique que $f(v_1) = 1.v_1$. Comme v_1 est un vecteur différent du vecteur nul, 1 est une valeur propre de f et v_1 est un vecteur propre associé à cette valeur propre.

13. (a) i. On a supposé que $y \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ donc il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x) - x$.

ii. On a supposé que $y \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ donc $f(y) = y$. Il en résulte que

$$f^2(x) = f(y + x) = f(y) + f(x) = y + (y + x) = 2y + x$$

Montrons par récurrence que $f^k(x) = ky + x$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. L'initialisation a déjà été vérifiée. Supposons l'égalité $f^k(x) = ky + x$ vraie pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors,

$$\begin{aligned} f^{k+1} &= f(f^k(x)) \\ &= f(ky + x) \\ &= kf(y) + f(x) \\ &= ky + (y + x) \\ &= (k+1)y + x \end{aligned}$$

On conclut que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f^k(x) = ky + x$.

iii. On a vu à la question 12b que, pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, $\|f(z)\| \leqslant \|z\|$. On a aussi $\|f^2(z)\| = \|f(f(z))\| \leqslant \|f(z)\| \leqslant \|z\|$. En itérant cette inégalité, on démontre que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\|f^k(z)\| \leqslant \|z\|$. En particulier pour $z = x$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|ky + x\| \leqslant \|x\|$.
Ainsi $\|ky\| = \|ky + x - x\| \leqslant \|ky + x\| + \|-x\| \leqslant \|x\| + \|x\| = 2\|x\|$.
Or $\|ky\| = k\|y\|$; on a donc bien montré

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad k||y|| \leqslant 2||x||$$

La norme $\|y\|$ est alors nécessairement nulle sinon la norme de x serait infinie. En conclusion,

$$\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \cap \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$$

(b) On a montré que $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \cap \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) = \{0\}$. Le théorème du rang indique que $\dim(\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})) + \dim(\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})) = n$.

Par conséquent, $\qquad \mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_n) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_n)$

(c) Soit $x \in \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$. Il existe alors $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = f(y) - y$. Ainsi, $f(x) = f(f(y) - y) = (f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})(f(y)) \in \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$. Finalement,

$$\forall x \in \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \qquad f(x) \in \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$$

(d) Soit λ une valeur propre différente de 1 et soit x un vecteur propre associé à λ. Alors $f(x) = \lambda x$ puis $f(x) - x = (\lambda - 1)x$, d'où $x = \dfrac{1}{\lambda - 1}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})(x) = (f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})(\dfrac{x}{\lambda - 1})$ et $x \in \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$.
Par conséquent, l'espace propre de toute valeur propre de f différente de 1 est inclus dans $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$.