CORRIGE SUJET 2

Exercice 1

1. f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2x^2} = \dfrac{2x^2-1}{2x^2}$, du signe de $(x - \dfrac{1}{\sqrt{2}})(x + \dfrac{1}{\sqrt{2}})$. On en déduit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		-1		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$1-\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$1+\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. (a) $\varphi(z) = z \Longleftrightarrow 1 + \dfrac{z}{z^2+1} = 0 \Longleftrightarrow z^2 + z + 1 = 0 \Longleftrightarrow z = j$ ou $z = \bar{j}$, où $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   (b) $\varphi(z) = z + 1 + \dfrac{z}{z^2 + z\bar{z}} = z + 1 + \dfrac{1}{z + \bar{z}}$.

   La partie réelle de $\varphi(z)$ est donc $X = x + 1 + \dfrac{1}{2x} = f(x)$.

   (c) L'étude des variations de f permet de conclure : x, partie réelle de z, décrivant $[-1, 0[\cup]0, 1]$, X décrit $]-\infty, f(-\dfrac{1}{\sqrt{2}})] \cup [f(\dfrac{1}{\sqrt{2}}), +\infty[$, soit $]-\infty, 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}, +\infty[$.

Exercice 2

1. (a) f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ comme inverse de la fonction $x \mapsto x(\ln x)^2$, strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

   (b) $\forall x \in [k-1, k],\ f(k) \leq f(x)$. Il suffit alors d'intégrer cette inégalité entre $k-1$ et k. On obtient : $\dfrac{1}{k(\ln k)^2} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. $\displaystyle\int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^n \frac{1}{x}(\ln x)^{-2}\,\mathrm{d}x = \Big[-(\ln x)^{-1}\Big]_2^n = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)\big(\ln(n+1)\big)^2} > 0$. La suite (u_n) est donc croissante.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. $u_n = \dfrac{1}{2(\ln 2)^2} + \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$. Donc :

   $u_n \leq \dfrac{1}{2(\ln 2)^2} + \displaystyle\int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x$. On a donc : $\forall n \geq 3,\ u_n \leq \dfrac{1}{2(\ln 2)^2} + \dfrac{1}{\ln 2}$. La suite (u_n) est donc majorée. Etant croissante, elle est convergente.

Exercice 3

1. (a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (1+e^x)f'(x) + e^x f(x) = 1 + e^x$.
   (b) L'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 1 + e^x$ est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto x + e^x + k$, où k désigne un réel quelconque.
   (c) f est solution du problème posé si et seulement si : $\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x + e^x + k$, donc si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x+e^x}{1+e^x} + \dfrac{k}{1+e^x}$.
2. (a) De l'indication, on déduit que l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto -\ln|1+e^{-x}| + k$, ou encore $x \mapsto -\ln(1+e^{-x}) + k$, où k est une constante réelle arbitraire.
   (b) On considère cette fois la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{f(x)}{1+e^x}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \dfrac{(1+e^x)f'(x) - e^x f(x)}{(1+e^x)^2} = \dfrac{1}{1+e^x}$. f est donc solution du problème posé si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = -\ln(1+e^{-x}) + k$, donc si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -(1+e^x)\ln(1+e^{-x}) + k(1+e^x)$.

Exercice 4

1. (a) N suit la loi binomiale de paramètres $(20, \frac{1}{3})$.
   (b) La probabilité pour que le candidat soit admis est $P(N \geq 15) = \displaystyle\sum_{k=15}^{20} \binom{20}{k} (\frac{1}{3})^k (\frac{2}{3})^{20-k}$
   ou encore : $\dfrac{1}{3^{20}} \left(\binom{20}{15} 2^5 + \binom{20}{16} 2^4 + \binom{20}{17} 2^3 + \binom{20}{18} 2^2 + \binom{20}{19} 2 + \binom{20}{20} \right) = 0.00017$ à 10^{-5} près. La probabilité que le candidat soit reçu est très faible. Il vaut mieux réviser !
2. (a) C suit la loi binomiale de paramètre $(20, p)$.
   (b) $B_i = (B_i \cap E) \cup (B_i \cap \overline{E})$, où E désigne l'évènement : «le candidat connaît la réponse à la question i». On a donc $P(B_i) = P(B_i/E)P(E) + P(B_i/\overline{E})P(\overline{E}) = p + \dfrac{1}{3}(1-p) = \dfrac{2p+1}{3}$.
   (c) T suit la loi binomiale de paramètre $(20, \dfrac{2p+1}{3})$.
   (d) La probabilité que ce candidat soit admis est : $P(T \geq 15) = \displaystyle\sum_{k=15}^{20} \binom{20}{k} (\frac{7}{9})^k (\frac{2}{9})^{20-k}$
   $= \dfrac{1}{9^{20}} \left(\binom{20}{15} 7^{15}\, 2^5 + \binom{20}{16} 7^{16}\, 2^4 + \binom{20}{17} 7^{17}\, 2^3 + \binom{20}{18} 7^{18}\, 2^2 + \binom{20}{19} 7^{19}\, 2 + \binom{20}{20} 7^{20} \right)$
   $= 0.726$ à 10^{-3} près.