# Sujet I

## Exercice I ( 4 points)

On considère le nombre complexe $a = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

**1.** **a.** $a^5 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5 = e^{i2\pi} = 1$.

**b.** Pour tout nombre complexe $z$, $(z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4) = z+z^2+z^3+z^4+z^5-1-z-z^2-z^3-z^4$ donc $z^5-1=(z-1)(1+z^2+z^3+z^4)$

En particulier : $0 = a^5-1=(a-1)(1+a^2+a^3+a^4)$, comme $a$ -1 n'est pas nul , alors $1+a+a^2+a^3+a^4=0$.

**2.** **a.** $a^3 = e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{i\pi}\times e^{i\frac{\pi}{5}} = -e^{i\frac{\pi}{5}}$ **;** $(\overline{a})^2 = (e^{-i\frac{2\pi}{5}})^2 = e^{i\frac{-4\pi}{5}} = e^{i\pi}\times e^{i\frac{\pi}{5}}$ donc $a^3 = (\overline{a})^2$

et $a^4 = e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i2\pi}\times e^{i\frac{-2\pi}{5}}$ donc $a^4 = \overline{a}$ :

$(a+\overline{a})^2 + (a+\overline{a}) - 1 = a^2+2a\overline{a}+\overline{a}^2+a+\overline{a}+1 = a^2+2+a^3+a^4-1 = 1+a+a^2+a^3+a^4 = 0$

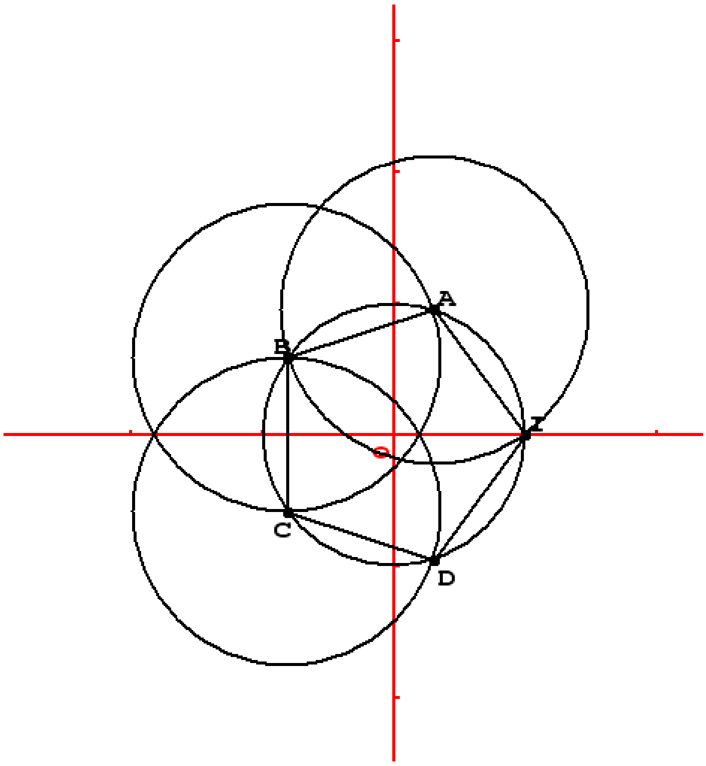
donc $(a+\overline{a})^2+(a+\overline{a})-1=0$

**b.** Or $a = e^{i\frac{2\pi}{5}} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\overline{a} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, d'après la relation précédente , on a donc $\left(2\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2$ +2 $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$- 1 =0 donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$est solution de l'équation 4x² +2 x -1 = 0 .

**c.** $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est la solution positive de l'équation précédente donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

**3-** **a**.IA = $|a-1|$ ; AB $=|a^2-a| = |a|\times|a-1| = |a-1| = IA$ ; BC = $|a^3-a^2| = |a^2|\times|a-1| = |a-1|$ CD= $|a^4-a^3| = |a^3|\times|a-1| = |a-1|$ ; DI = $|\overline{a}-1| = |\overline{a-1}| = |a-1|$ Donc IA= AB= BC= CD= DI.

**b.** Les points I et A sont construits , B a pour affixe a² , C a pour affixe $a^3$ et D a pour affixe $a^4$, les points B, C, et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon l'unité . Et B AB = IA d'où la construction du point B idem pour les points C et D .




## Exercice II (4, 5 points)

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes et 2 vertes. Dans les questions **1.** et **2.** on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.

**1.** D'après ce qui précède , un évènement élémentaire est un ensemble de 3 boules choisi parmi 10 ou combinaison de 3 éléments parmi 10, ces évènements élémentaires sont supposés équiprobables et donc dans les 3 calculs qui suivent il suffira de dénombrer le nombre de cas possibles : $\binom{10}{3} = 120$ et le nombre de cas favorables

A " les trois boules sont rouges"
B " les trois boules sont de la même couleur"
C " les trois boules sont chacune d'une couleur différente"

**a.** Calculer les probabilités *p(*A*)= p(*" les trois boules sont rouges")= $\dfrac{\binom{5}{3}}{120} = \dfrac{1}{12}$ *;*

*p(*B*)= p(*" les trois boules sont de la même couleur") *= p ( 3 boules rouges ou 3 boules jaunes ) =* $\dfrac{\binom{5}{3}}{120} + \dfrac{\binom{3}{3}}{120} = \dfrac{11}{120}$ *; p(*C*)= p( 1 boule rouge et 1 boule jaune et 1 boule verte ) =* $\dfrac{5}{120} \times \dfrac{3}{120} \times \dfrac{2}{120} = \dfrac{1}{4}$ .

**b.** On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues, les valeurs prises par X sont donc 1 ; 2 ; 3

p(X= 1) = p( 3 boules de la même couleur )= p( B) =$\dfrac{11}{120}$

b(X= 3)= p( 3 boules de couleurs différentes )= $p ( C) = \dfrac{30}{120}$ . Donc p(B) =1-p( C) –p( A) = $\dfrac{79}{120}$

E(X)= $\dfrac{11}{120} + 2 \times \dfrac{79}{120} + 3 \times \dfrac{30}{120} = \dfrac{259}{120} \approx 2{,}16$.

**2.** Dans cette question , on remplace les 5 boules rouges par *n* boules rouges où *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc *n* + 5 boules, c'est - à- dire *n* rouges, 3 jaunes et 2 vertes.
On tire au hasard et simultanément 2 boules de cette urne. Soit les événements suivants :

D " tirer deux boules rouges"
E " tirer deux boules de la même couleur". D'après ce qui précède , un évènement élémentaire est un ensemble de 2 boules choisi parmi (n +5) ou combinaison de 2éléments parmi ( n+5), ces évènements élémentaires sont supposés équiprobables

**a.** D'où P(D) = $\dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{n+5}{2}}$ $p(D)=\dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

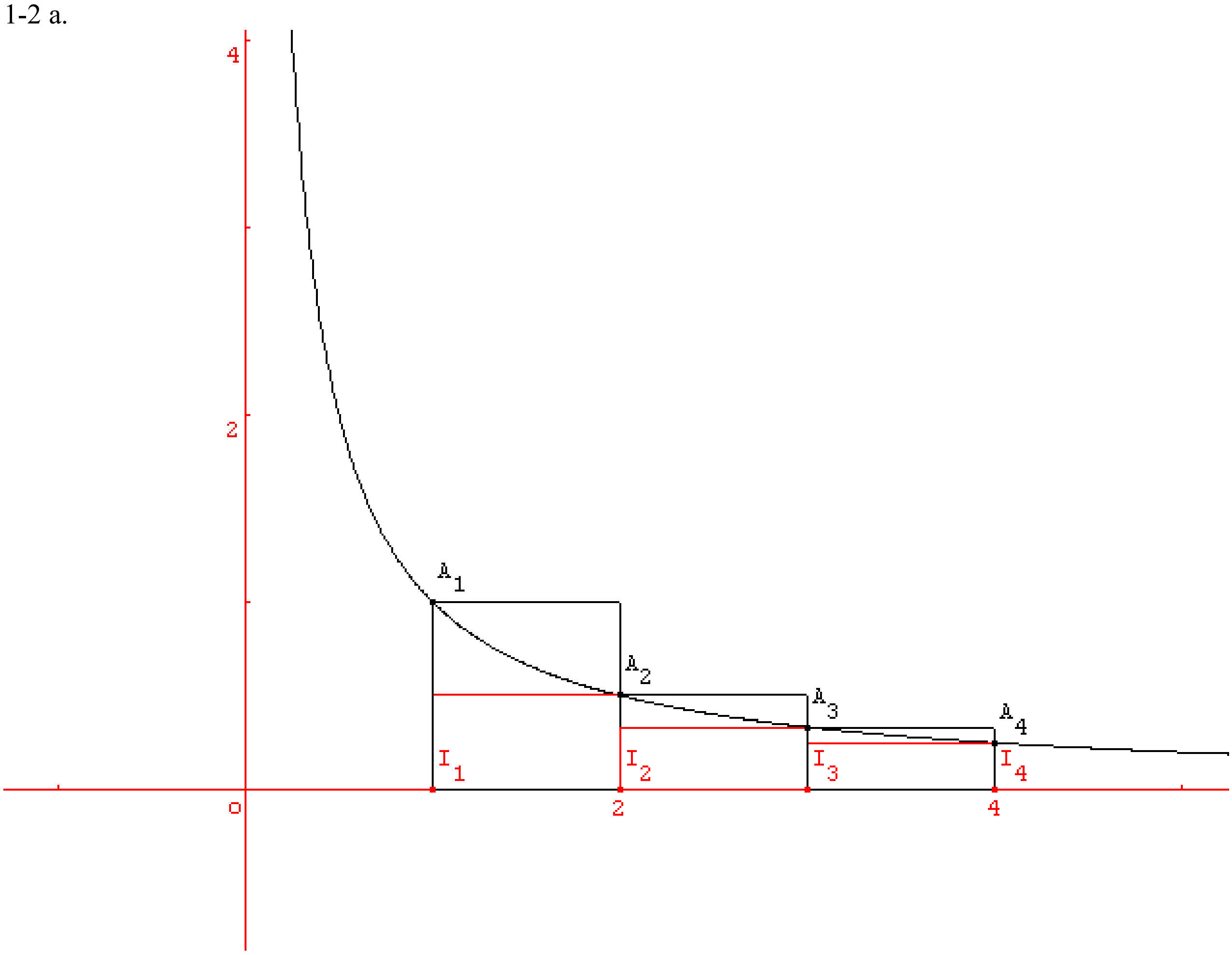
**b**, *p(* E )= p ( obtenir 2 boules rouges ou 2 boules jaunes ou 2 boules vertes ) =
$\dfrac{n(n-1}{(n+5)(n+4}+\dfrac{2\binom{3}{2}}{(n+5)(n+4)}+\dfrac{2}{(n+5)(n+4)}=\dfrac{n^2-n+8}{n^2+9n+20}$.

$p($ E $)\geq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow n^2-11n-4\geq 0$ vrai pour n $\geq 12$

## Exercice III.( 7 points)

Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout n $\geq 2$ par : $u_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+....\dfrac{1}{n}-\int_1^n\dfrac{1}{x}dx$.

1-2 a.



l'intégrale : $\int_1^4 \frac{1}{x}dx$ est représentée par l'aire du domaine plan limité par la courbe , l'axe des abscisses , les droites d'équation x = 1 et x = 4 ; cette aire est supérieur à la somme des aires des rectangle R1 ,R2 ,R3 ( en rouge) et inférieure à la somme des aires des rectangles R'1 , R'2 , R'3 . Donc $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \le \int_1^4 \frac{1}{2}dx \le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

$\frac{13}{12} \le \int_1^4 \frac{1}{x}dx \le \frac{11}{6}$.

b. n désigne un entier naturel n $\ge 2$, en considérant de même les intervalles [1; 2]; [2; 3]…. [n; n-1]; [n-1; n], l'intégrale $\int_1^n \frac{1}{x}dx$ est représentée par l'aire du domaine plan limité par la courbe, l'axe des abscisses, les droites d'équation x = 1 et x = n . De la même façon que précédemment cette aire est encadrée par la somme des aires des rectangle de longueur l'unité et de largeur l'ordonnée des points sur la courbe :

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{n} \le \int_1^4 \frac{1}{x}dx \le 1+\frac{1}{2}...+\frac{1}{n-1}$

3- pour tout n entier , n $\ge 2$ , $-(1+\frac{1}{2}+.....+\frac{1}{n-1}) \le -\int_1^4 \frac{1}{x}dx \le -(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}...+\frac{1}{n})$ donc $\frac{1}{n} \le u_n \le 1$

donc : $0 \le u_n \le 1$.

4- a. pour tout entier n , n $\ge 2$, $\int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx$ est représentée par l'aire du domaine plan limité par la courbe, l'axe des abscisses, les droites d'équation x = n et x = n+1 , elle est encadrée par l'aire du rectangle de longueur 1 et de largeur l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse ( n+1) soit $\frac{1}{n+1}$ et l'aire du rectangle de longueur 1 et de largeur l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse n soit $\frac{1}{n}$ . Donc $\frac{1}{n+1} \le \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \le \frac{1}{n}$.

b.

$u_{n+1} - u_n = .$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx-\left(1+\frac{1}{2}...\frac{1}{\mathrm{n}}-\int_1^{\mathrm{n}}\frac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{dx}\,.\right)=\frac{1}{n+1}-\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx+\int_1^{\mathrm{n}}\frac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{dx}=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx \le 0$ .

La suite $(u_n)$ est décroissante.

c. la suite $(u_n)$ est décroissante , majorée par 1 , elle est convergente. On note C sa limite.

5- Soit la suite $(v_n)$ définie pour tout n entier, n$\ge 2$, par : $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

a. $\lim(v_n - u_n) = \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ ; la suite $(u_n)$ est décroissante ;

$v_{n+1} - v_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....\frac{1}{n}-\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx-\left(1+\frac{1}{2}...\frac{1}{n-1}-\int_1^n\frac{1}{x}dx\right)=\frac{1}{n}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx \ge 0$, la suite $(v_n)$ est donc croissante . Donc les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes. Elles admettent la même limite C

b. En déduire que pout tout entier n, n$\ge 2$, la suite $(u_n)$ étant décroissante, ses termes sont supérieurs à sa limite donc $u_n \ge C \Leftrightarrow u_n - C \ge 0$

la suite $(v_n)$ étant croissante , ses termes sont inférieurs à sa limite donc $v_n \le C \Leftrightarrow u_n - C \le \frac{1}{n}$

Conclusion : $0 \le u_n - C \le \frac{1}{n}$

## Exercice IV.( 4,5 points)

La fonction $f$ est définie sur l'intervalle [0 ; +∞ [ par $f\left(x\right)=\left(20x+10\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

On note ($C$) la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique 0,5 cm).

**1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(20x+10)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{2}x}=0$ la fonction exponentielle l'emporte sur toute fonction polynôme ; donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

**2.** La fonction $f$ est le produit de fonctions dérivables est dérivable sur [0 ; +∞ [ ,

$$f'(x)=20e^{-\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}(20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}=e^{-\frac{1}{2}x}(15-10x)$$

D'où le tableau de variation

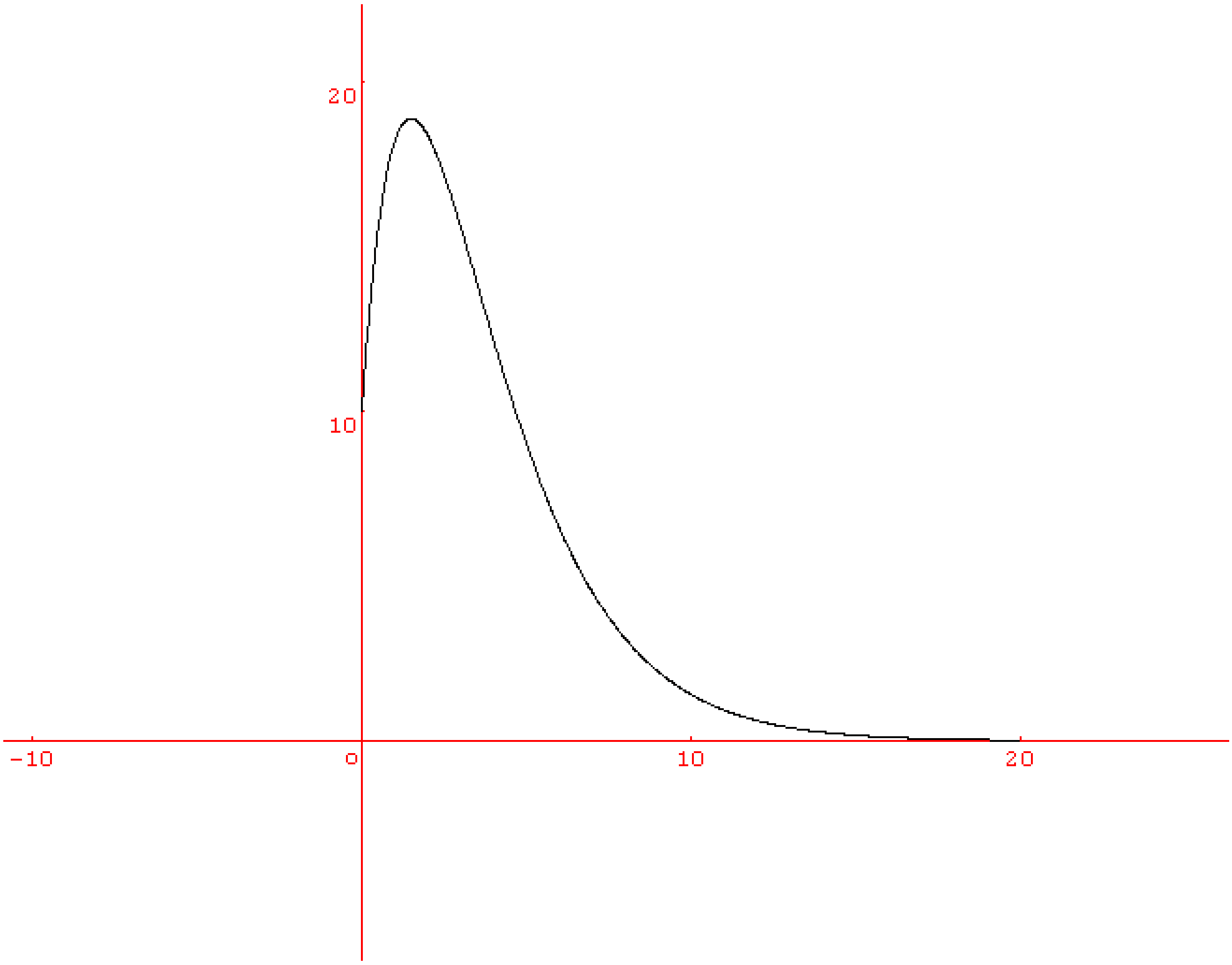
| x | 0 | | 1,5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 0 | - | |
| f(x) | | ↗ | | ↘ | |

f(0) = 10 ; f(1,5) $\approx 14$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

**3.** $f$ est continue strictement croissante sur ]0, 1,5], comme f(0) = 10 , f(x) > 10 sur cet intervalle ; f est continue strictement décroissante sur [1,5 ; $+\infty$ [ et f(1,5) $\approx 14$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ donc l'équation $f\left(x\right)=10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle [1,5 ; $+\infty$ [ et donc sur ] 0 ; +∞ [.

] 0 ; +∞ [. Une valeur décimale approchée de α. Par défaut à $10^{-2}$ est 4, 67

4-




L'aire demandée est : $\int_0^a (20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}dx = 100 - 40ae^{-\frac{1}{2}a} - 10e^{-\frac{1a}{2}}$ après une intégration par parties , la limite en $+\infty$ de cette expression est 100