EPREUVE DE MATHEMATIQUES (Sujet 1)

Correction

Exercice I (3 points)

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = e^{-x^2}$.

1- *f* est dérivable sur l'intervalle d'étude et $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ expression négative sur $[0;+\infty[$, *f* est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

2- On pose $J_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$, n étant un entier naturel.

a. La fonction *f* est positive (fonction exponentielle) donc pour tout entier n $J_n > 0$

b. D'autre part , si $n<t<n+1$, comme *f* est décroissante sur $[0;+\infty[$ $f(n+1)<f(t)<f(n)$ donc

$f(n+1) < \int_n^{n+1} f(t)dt < f(n)$. Donc pour tout n entier, $f(n+1) < J_n < f(n)$.

3- $f(n+2) < J_{n+1} < f(n+1) < J_n < f(n)$ la suite J_n est décroissante. Cette suite J_n est décroissante , minorée par 0 , elle est donc convergente.

Exercice II (3 points)

Une classe compte 30 élèves dont 20 filles. A chaque cours de mathématiques, le professeur de cette classe interroge au hasard un élève. D'un cours à l'autre, le professeur ne se rappelle pas de l'élève interrogé au cours précédent ce qui fait qu'à chaque cours, le choix de l'élève par le professeur est indépendant des choix précédents.

1. La probabilité, à un cours donné, que l'élève interrogé soit une fille est $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

2. Soit *n* un entier positif non nul.
On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de filles interrogées durant *n* cours de mathématiques consécutifs.

a. La loi de probabilité de X est binomiale de paramètre *n* , $p=\frac{2}{3}$

b. La probabilité que le nombre de filles interrogées soit égal à 4 durant 10 cours consécutifs est $\binom{10}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^6 \approx 0{,}057$

c. la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 est telle que

p(X=0)< 0,001 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n < 0{,}001 \Leftrightarrow -n\ln 3 < \ln 0{,}001 \Leftrightarrow n > -\frac{\ln 0{,}001}{\ln 3} \Leftrightarrow n \geq 7$,le nombre minimum est donc 7

Exercice III (3points).

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = x-1$.

1- A l'aide d'une intégration par parties, $\int_1^x e^t(t-1)dt = e^x(x-2) + e$

2- **a-** Soit *z* une fonction dérivable sur l'ensemble R des nombres réels.
On pose $f(x) = z(x)e^{-x}$. La fonction *f* est solution de (E) si et seulement si , pour tout *x* réel , $f'(x) + f(x) = x-1 \Leftrightarrow z'(x)e^{-x} - z(x)e^{-x} + z(x)e^{-x} = x-1 \Leftrightarrow z'(x) = e^x(x-1)$

b- D'après la question 1- une primitive de la fonction z est : $x \mapsto e^x(x-2)+e$ toutes les fonctions z vérifiant pour tout x réel $z'(x)=e^x(x-1)$ sont donc les fonctions définies sur R par : $x \mapsto e^x(x-2)+k$ où k désigne une constante réelle.

3. D'après l'équivalence logique établie en question **2-a.** l'ensemble des solutions de l'équation (E) est donc l'ensemble des fonctions définies sur R par :
$x \mapsto z(x)e^{-x} = (x-2)+ke^{-x}$.

Exercice IV (7points)

Partie A

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2x-1+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.On désigne par (C) la courbe représentant f dans un repère orthonormal unité 2cm.

Remarque $f(x)=2x-1+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$= 2$x$-1+ln($x$)-ln($x$+1)

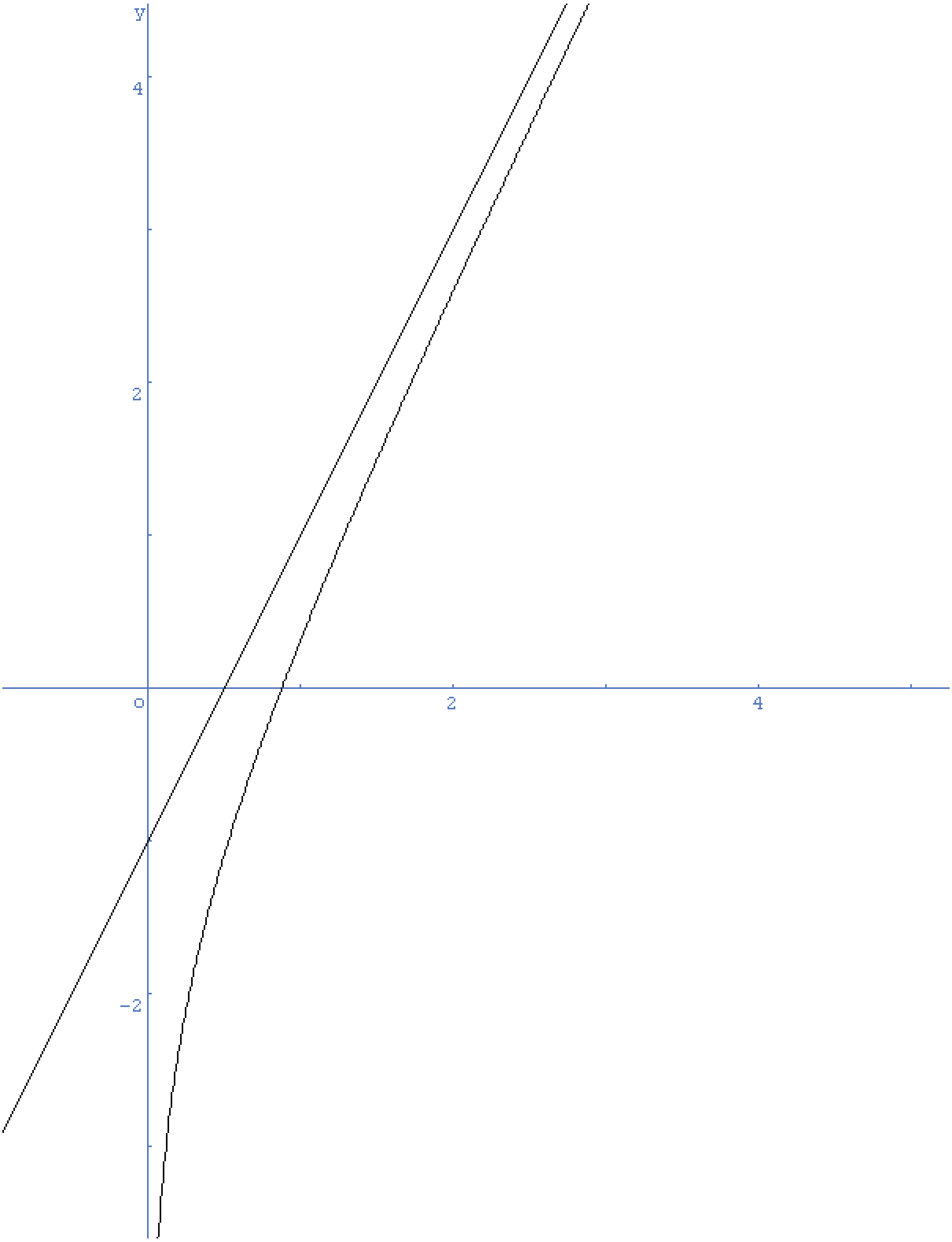
1- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$ par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x}{x+1}=0$. Donc par somme ,
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x+1}=0$ par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x}{x+1}=-\infty$ Donc par somme, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$

2- f est dérivable sur $]0;+\infty[$ $f'(x)=2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2x^2+2x+1}{x(x+1)}$, expression qui est du signe de $2x^2+2x+1$ sur $]0;+\infty[$. f'(x) > 0 sur $]0;+\infty[$, f est strictement croissante sur cet intervalle ;

3- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x}{x+1}=0$ donc (C) admet donc pour asymptote oblique, la droite d'équation y= 2x-1 en + ∞ . $f(x)=2x-1+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ donc $f(x)-(2x-1)=\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$. Comme ;
$\dfrac{x}{x+1}<1$, $\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)<0$, donc (C) se situe au dessous de (D).

4- f est dérivable donc continue sur $]0;+\infty[$ l'ensemble des valeurs de *f(x)* est d'après l'étude des limite $]0;+\infty[$; f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, donc l'équation *f(x)* = 0 admet une solution unique dans $]0;+\infty[$. Avec la calculatrice, on constate que f(0,8) <0 et f(0,9)>0 donc cette solution est comprise entre 0,8 et 0,9.



Partie B
On considère la suite *(u_n)* définie pour tout entier n strictement positif par :
$u_n = f(n) - (2n-1) = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

1- u_n - u_{n+1}= $\ln(n) - \ln(n+1) - \ln(n+1) + \ln(n+2) = \ln\left(\frac{n(n+2}{(n+1)^2}\right)$. Or n(n+2)<(n+1)². Donc $u_n - u_{n+1} < 0$ .La suite est croissante

De plus $\frac{n}{n+1} < 1$ donc u_n<0 pour tout entier n strictement positif. Cette suite est donc convergente

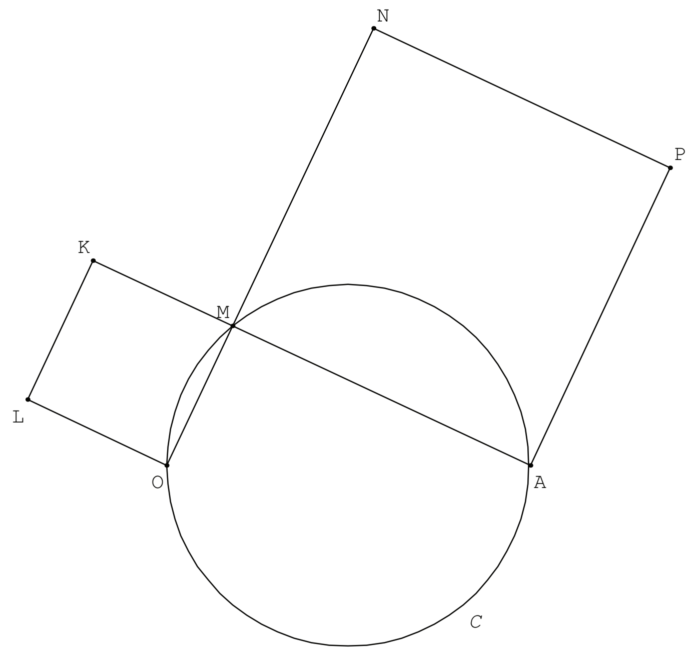
2- On pose $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \text{-}\ln(n+1)$, cette suite S_n est divergente et sa limite est $-\infty$.

3- On pose $T_n = u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{2n} = \ln(n+1) - \ln(2n+1) = \ln\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)$. Cette suite converge

et T_n. $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

EXERCICE V (4 points)

Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle *C* de diamètre $[\text{OA}]$, un point M variable appartenant au cercle *C* et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct MAPN et MKLO. La figure est représentée ci-dessous.



Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de montrer que le point N *appartient à un cercle à déterminer.*

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On note *k*, *l*, *m*, *n* et *p* les affixes respectives des points K, L, M, N et P.

1. le point M appartient au cercle *C*, de rayon $\frac{1}{2}$ et de centre le milieu I de [OA] dont l'affixe est $\frac{1}{2}$ Donc M appartient à C signifie IM = $\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| m - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$.

2. Par construction, L est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $l = \mathrm{i}m$.

De même P est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle -$\frac{\pi}{2}$ donc p-1= -i(m-1) donc $p = -\mathrm{i}m + 1 + \mathrm{i}$.

On admettra que l'on a également $n = (1-\mathrm{i})m + \mathrm{i}$ et $k = (1+\mathrm{i})m$.

3. **a.** le milieu Ω du segment $[\mathrm{PL}]$ a pour affixe : $\frac{p+l}{2} = \frac{-im+1+i+im}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ point indépendant de la position du point M sur le cercle *C*.

b. $\mathrm{I}\,\Omega = \left|\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ donc Ω appartient au cercle *C* , il appartient également à la médiatrice de [OA].

4. **a.** $\mathrm{KN} = |k-n| = |(1+i)m-(1-i)m-i| = |i(2m-1)| = 2\left|m-\frac{1}{2}\right| = 1$,

b. $\Omega\mathrm{K} = |1+i|\left|m-\frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ετ $\Omega\mathrm{N} = |1-i|\left|m-\frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. le triangle ΩNK est isocèle et rectangle d'après la réciproque du théorème de Pythagore . Le point N appartient au cercle de centre Ωet de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$