ANNÉE 2014

CONCOURS SUR ÉPREUVES

D'ADMISSION AU COURS DE L'ÉCOLE DE L'AIR

OPTION « SCIENCES »

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 8

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Chaque candidat doit traiter les quatre exercices proposés. Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.

L'attention des candidats est portée sur le fait que l'on tiendra compte du soin et de la rigueur apportée dans le travail.

Si, en cours d'épreuve, le candidat rencontre ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signale et continue sa composition.

Exercice 1

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour $f \in E$, on pose $\varphi(f) = g$, où g est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f'(x) - xf(x)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. (a) Résoudre l'équation différentielle : $y' - xy = 0$ sur $\mathbb{R}$. En déduire $\ker \varphi$. φ est-il injectif ?
   (b) Justifier que φ est surjectif.
3. (a) Soit $g : x \mapsto (1+x^2)e^{x^2}$. Déterminer f telle que $f(0) = 0$ et $\varphi(f) = g$. On pourra chercher f sous la forme $x \mapsto h(x)e^{x^2}$.
   (b) En cherchant f par la méthode de variation de la constante, déterminer pour $x \in \mathbb{R}$ la valeur de $\displaystyle\int_0^x (1+t^2)e^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

   Dans la suite de l'exercice, $\mathcal{P}$ désigne le sous-espace vectoriel de E des applications polynomiales.
4. Justifier que φ induit un endomorphisme ψ de $\mathcal{P}$. ψ est-il injectif ?
5. ψ est-il surjectif ?

Exercice 2

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On considère la matrice $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 3\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique χ_M de la matrice $M(\alpha)$.
2. (a) On suppose que le système $\begin{cases} \chi_M(z) = 0 \\ \chi'_M(z) = 0 \end{cases}$ admet au moins une solution dans $\mathbb{C}$. Montrer que α appartient à $\mathcal{E} = \{0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, i\frac{\sqrt{2}}{2}, -i\frac{\sqrt{2}}{2}\}$.
   (b) On suppose que $\alpha \notin \mathcal{E}$. Que peut-on dire de χ_M ? En déduire que, si $\alpha \notin \mathcal{E}$, $M(\alpha)$ est diagonalisable.
3. (a) $M(0)$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
   (b) Montrer que, si $\alpha \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$, $M(\alpha)$ n'est pas diagonalisable.
4. Déterminer une matrice triangulaire supérieure semblable à $M(0)$ et présenter une méthode permettant d'obtenir une matrice triangulaire supérieure semblable à $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
5. Pour quels α de $\mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ 3\alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 3

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction réelle d'une variable réelle $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est $]-1, +\infty[$.
2. Grâce au changement de variable défini par $t = u^2$, calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
3. Montrer que f est continue sur $]-1, +\infty[$.
4. Etudier le sens de variation de f.
5. Pour $x > -1$, calculer $f(x) + f(x+1)$. En déduire que : $\forall x > 0$, $\frac{1}{2(x+1)} \leq f(x) \leq \frac{1}{2x}$.
6. Déterminer un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
7. Déterminer un équivalent de $f(x)$ au voisinage de -1.
8. Donner l'allure de la représentation graphique de f.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie sur l'ensemble des entiers naturels par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Etudier le sens de variation de (u_n). En déduire que (u_n) est convergente et préciser sa limite.
3. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right) = 1$. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
   On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, de limite ℓ.
4. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$?
5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-S_n}$, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Retrouver ainsi le résultat de la question précédente et déterminer un équivalent de S_n quand $n \to +\infty$.

CORRIGE SUJET 1

Exercice 1

1. Soit $f \in E$. $g \in E$ par théorèmes généraux. De plus, comme la dérivation est linéaire, φ est linéaire. φ est donc un endomorphisme de E.
2. (a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, homogène et normalisée, dont la solution générale est $x \mapsto ke^{\frac{x^2}{2}}$, $k \in \mathbb{R}$. Donc $\ker \varphi$ est la droite vectorielle dont un vecteur directeur est $x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}}$. $\ker \varphi \neq \{0_E\}$, donc φ n'est pas injectif.

   (b) Soit $g \in E$. g étant continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer que l'équation différentielle $y' - xy = g(x)$ admet au moins une solution (l'ensemble des solutions est une droite affine). φ est donc surjectif.
3. (a) Soit $f \in E$. Posons $h : x \mapsto f(x)e^{-x^2}$. $h \in E$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2xe^{x^2}h(x) + e^{x^2}h'(x)$.
   $\varphi(f) = g \iff \forall x \in \mathbb{R}$, $2xe^{x^2}h(x) + e^{x^2}h'(x) - xe^{x^2}h(x) = (1+x^2)e^{x^2}$. Donc :
   $\varphi(f) = g \iff \forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) + xh(x) = 1 + x^2$. Or : $h : x \mapsto x$ vérifie cette relation, donc $f : x \mapsto xe^{x^2}$ vérifie $\varphi(f) = g$. Mais $f(0) = 0$. Par unicité du problème de Cauchy $\begin{cases} \varphi(y) = g \\ y(0) = 0 \end{cases}$, c'est la fonction f cherchée.

   (b) On cherche f sous la forme $x \mapsto k(x)e^{\frac{x^2}{2}}$, avec k de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   $\varphi(f) = g \iff \forall x \in \mathbb{R}$, $k'(x) = (1+x^2)e^{\frac{x^2}{2}}$. Donc $k : x \mapsto \displaystyle\int_0^x (1+t^2)e^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ convient.
   $f : x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_0^x (1+t^2)e^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ vérifie donc $\varphi(f) = g$. Or $f(0) = 0$. Par unicité du problème de Cauchy $\begin{cases} \varphi(y) = g \\ y(0) = 0 \end{cases}$, f est la fonction cherchée. En comparant les expressions obtenues au (a) et au (b), on conclut : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x (1+t^2)e^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = xe^{\frac{x^2}{2}}$.
4. $\forall f \in \mathcal{P}$, $(x \mapsto f' - xf) \in \mathcal{P}$. ψ a donc un sens. De plus, ψ est linéaire car φ l'est. Par ailleurs : $\psi(f) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ke^{\frac{x^2}{2}} \iff \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = k$. Mais f est polynomiale. Par croissance comparée, $k = 0$. On a donc $\ker \psi = \{0\}$. ψ est donc injectif.
5. Soit f polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$. $x \mapsto f'(x) - xf(x)$ est polynomiale de degré $n+1$.
   $x \mapsto 1$ n'a donc pas d'antécédent par ψ. ψ n'est donc pas surjectif.

Exercice 2

1. $\chi_M(X) = \det(M(\alpha) - XI_3) = -X^3 + 3\alpha^2 X + \alpha$.
2. (a) $\chi_M'(X) = -3X^2 + 3\alpha^2 = 0$. Les racines de χ_M' sont donc α et $-\alpha$.

   $\exists z \in \mathbb{C}, \left\{ \begin{array}{c} \chi_M(z) = 0 \\ \chi_M'(z) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{C}, \left\{ \begin{array}{c} 2\alpha^2 z + \alpha = 0 \\ z = \alpha \text{ ou } z = -\alpha \end{array} \right.$. On en déduit que si le système proposé admet une solution dans $\mathbb{C}$, alors $\alpha(1 + 2\alpha^2) = 0$ ou $\alpha(1 - 2\alpha^2) = 0$. Donc $\alpha \in \mathcal{E}$.

   (b) Si $\alpha \notin \mathcal{E}$, l'étude faite au (a) montre que χ_M est scindé à racines simples. $M(\alpha)$ est donc diagonalisable.
3. (a) $M(0)$ admet 0 pour seule valeur propre et $M(0) \neq 0$, donc $M(0)$ n'est pas diagonalisable.

   (b) Si $\alpha \in \left\{-i\frac{\sqrt{2}}{2}, i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, α est valeur propre double et $M(\alpha) - \alpha I_3$ est une matrice de rang 2, car les deux premiers vecteurs colonnes de $M(\alpha) - \alpha I_3$ sont clairement linéairement indépendants. On en déduit $\dim \ker(M(\alpha) - \alpha I_3) = 1$ donc $M(\alpha)$ n'est pas diagonalisable.

   Si $\alpha \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, $-\alpha$ est valeur propre double et le même raisonnement permet d'établir que $M(\alpha)$ n'est pas diagonalisable.
4. Si (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{C}^3$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à $M(0)$, la matrice de u dans la base (e_3, e_2, e_1) est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, matrice semblable à $M(0)$.

   $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ admet $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ comme valeur propre double et $\sqrt{2}$ comme valeur propre simple, puisque $\mathrm{tr}\left(M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 0$. $\ker\left(M(\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} I_3\right)$ et $\ker\left(M(\frac{\sqrt{2}}{2}) - \sqrt{2} I_3\right)$ sont deux droites vectorielles. On choisit un vecteur directeur sur chaque droite et un troisième vecteur de $\mathbb{C}^3$ formant avec eux une base de $\mathbb{C}^3$. La matrice dans cette base de l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à $M(\frac{\sqrt{2}}{2})$ est triangulaire supérieure.
5. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ 3\alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix} = M(\alpha) + \alpha I_3$ est diagonalisable si et seulement si $M(\alpha)$ l'est, donc si et seulement si $\alpha \notin \mathcal{E}$.

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $t \mapsto \dfrac{t^x}{1+t}$ est définie et continue sur $]0,1]$. De plus : $\dfrac{t^x}{1+t} \underset{t\to 0}{\sim} t^x$. f est donc définie pour $-x < 1$, autrement dit pour $x > -1$.

2. $f(\frac{1}{2}) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ grâce au changement de variable définie par $t = u^2 = \varphi(u)$, $\varphi : u \mapsto u^2$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $]0,1]$ sur $]0,1]$. Donc $f(\frac{1}{2}) = 2\displaystyle\int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{1+u^2}\Big)\,\mathrm{d}u = 2\Big[u - \arctan u\Big]_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$.

3. Utilisons le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre. $h : (x,t) \mapsto \dfrac{t^x}{1+t}$ est continue sur $]-1,+\infty[\times]0,1]$. De plus, si $-1 < a < 0$ est fixé :
$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times]0,1]$, $|h(x,t)| \leq \dfrac{t^a}{1+t} = \psi(t)$, avec ψ continue et intégrable sur $]0,1]$.
f est donc continue sur $]-1,+\infty[$.

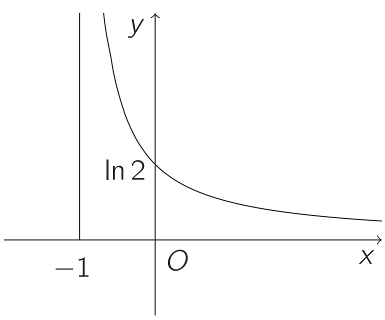
4. Soit (x,y) tel que $-1 < x < y$. $\forall t \in]0,1[$, $\dfrac{t^x}{1+t} > \dfrac{t^y}{1+t}$, donc
$f(x) - f(y) = \displaystyle\int_0^1 \Big(\frac{t^x}{1+t} - \frac{t^y}{1+t}\Big)\,\mathrm{d}t > 0$. f est donc strictement décroissante sur $]-1,+\infty[$.

5. Soit $x > -1$. $f(x) + f(x+1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x + t^{x+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}$. Or, par décroissance de f sur $]-1,+\infty[$: $2f(x+1) \leq f(x) + f(x+1) \leq 2f(x)$. D'où : $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{2(x+1)} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2x}$.

6. De la question précédente, on déduit grâce au théorème d'encadrement que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2xf(x) = 1$.
Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

7. $\forall x > -1$, $f(x) = -f(x+1) + \dfrac{1}{x+1}$. Or f est continue en 0, donc f est bornée au voisinage de 0. On a donc : $f(x+1) = o_{-1}(\dfrac{1}{x+1})$. Donc $f(x) \underset{x\to-1}{\sim} \dfrac{1}{x+1}$.

8. On a : $\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, f strictement décroissante et on dispose de la valeur de f en $\dfrac{1}{2}$ et $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$. L'allure de la représentation graphique de f est donc :



Exercice 4

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : x \mapsto xe^{-x}$. Or f laisse stable l'intervalle $]0, +\infty[$ et $u_0 > 0$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n(e^{-u_n} - 1) < 0$, donc (u_n) est strictement décroissante. Or (u_n) est minorée par 0. (u_n) est donc convergente. Soit ℓ sa limite. ℓ vérifie : $\ell(e^{-\ell} - 1) = 0$ donc $\ell = 0$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{e^{u_n} - 1}{u_n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n})$ existe et vaut 1. Grâce au théorème de Cesàro, admis sans démonstration, on en déduit que la suite de terme général $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\dfrac{1}{u_{k+1}} - \dfrac{1}{u_k}\Big)$ est convergente, de limite 1. Donc : $\dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{u_n} - 1) = 1 + o_{+\infty}(1)$. La suite de terme général $\dfrac{1}{nu_n}$ est donc convergente, de limite 1. On a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
4. Par théorème de comparaison des séries à termes réels positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.
5. La relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-S_n}$ s'obtient sans difficulté par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = -\ln(u_{n+1})$. On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge. De plus : $S_n = -\ln(\dfrac{1}{n+1}(1 + o_{+\infty}(1)) = \ln n + \ln(1 + \dfrac{1}{n}) - \ln(1 + o_{+\infty}(1))$. Donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.